

第109回CIS研究所パートナー会議事録(一般様用)

開催日: 2021年6月27日(日)
場 所: CIS会議室 13時~16時
講 師: 久米 健次 様
テーマ: 圧縮センシング

本日の第109回 CISパートナー会はCIS事務所とZOOMでのOnline 会議です。
システム構築は、PC上にZOOMに接続で進めました。

(以下 奈良市HP <https://www.city.nara.lg.jp/site/coronavirus/>)

奈良市は18日、新型コロナウイルス感染症対策本部会議を開き、県独自の「緊急処置措置」を7月11日まで延長すると決めた。 県内の感染者数は減少傾向で、6月27日時点の直近7日間(6月26日までの情報)の人口10万人あたりの新規陽性者数は3.4人で、ステージ3(感染急増)目安の15人を下回っている。

ー以上ー



テレビ会議風景

本日の話題選択の背景:

昨年末ころから、何か面白い話題はないかと探していた。人工知能関係でテーマを探す中でPythonを着手しほぐ理解、そのあと人工知能のニューラルネットワーク、ディープラーニング、強化学習等色々検討したが、どのテーマもかなり力業的な計算が必要となり、既存のプログラムで処理せざるを得ず面白くない。

このような状況の折、「圧縮センシング」はロジックは簡単で分かりやすく、更に最近多方面で急速に浸透している→何か新しい展開はできないだろうか。

1)「圧縮センシング」

原理は「極めて簡単」。中学校数学でやる連立一次方程式の話、(久米さん)
ところが、最近、多分野に急速に普及しているデータ処理技術である。「圧縮センシング」の新しい活用分野はないだろうか。

スパースモデリング

少ない数の測定値から、知りたい多量の信号(情報)を得たい。

高次元小標本推定

サンプル数は少ない $\Rightarrow$ 沢山の値を推定したい
一般的にはそんなことはできない。

しかし、推定したい量にスパース性(スカスカ性)があると可能になる！

極めて広範囲の応用の可能性がある。

大流行中。

流行が永続的かどうかはわからないが、広範な分野に浸透しつつ。



2006年に下記の定理が示され、これとMRI画像復元の成功例がきっかけになり爆発的な流行となった。

**「N次元信号があって、適当な基底で非ゼロ要素k個で表されるとすると、
高い確率で $m = O(k \log(N/k))$ 個の測定値から元のデータが再構成できる。」**
(Candes et al 2006; Donoho 2006)

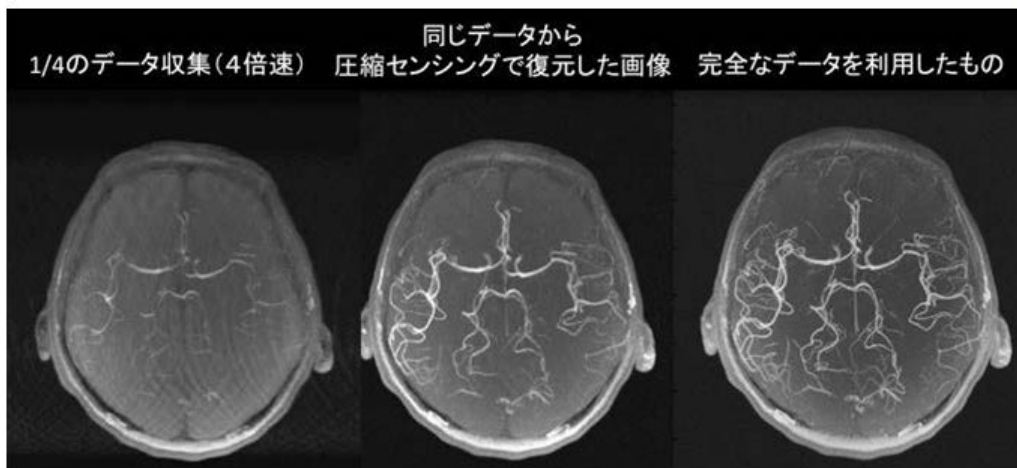
必要な標本数は、信号の次元より指数的に少ない！

具体的な画像をみると印象的である。

ここで、CS(Compressed Sensing)の例としてMRI画像をあげる。これ以外にも電波望遠鏡によるブラックホールの撮像など多数。

例でみるCS

- ・電波望遠鏡によるブラックホールの撮像
- ・MRI画像 撮影時間の短縮



スパース性を利用した脳血管画像の例

京都大学大学院医学研究科 放射線医学講座(画像診断学・核医学) 提供

図はMRIの画像:右は完全なデータから作成した画像。左端がデータを1/4に減じた画像。ここでCSを使うことにより、1/4データから右側画像とほぼ同等の中央の画像が得られる。

これをいかにして実現するか:

データが極めて少ない場合、スカスカのデータから情報を探り出す画期的な手法がある。

データがスパース(すかすか:ほとんどゼロ)
である場合に有効な情報処理の方法。

- ・データが少ない場合に、有用な情報を得る
- ・データが取得できない場合(観測衛星)
被験者の負担軽減(医学)
データ取得の無駄の削減。
単一ピクセルカメラ
=Digital Micromirror Device + Compressed Sensing
- ・複雑なデータ構造を単純化できる
(機械学習の補完、前処理)



データがスカスカの例:

データが取れない(観測衛星からのデータ)、CTやMRIのような医療計測では患者に大きな負担を強いられないよう少ないデータしかもできるだけ短時間で(したがって数の少ないデータ)しか得られない状況下)。

複雑なデータをすかすかにする→出来るか?

複雑に見えるデータが、実は少数の変数で記述できる場合がある。例えば、画像や時系列のフーリエ変換、ウェーブレット変換で可能である。

→ スパースの哲学: 世界に遍く存在する信号(データ)にはスパースな構造があるのではないか。(何等かの秩序があるということか?) これを活用しようというのがスパースモデル。その一部が「圧縮センシング」。「圧縮サンプリング」と呼ぶ方がわかりやすいかもしれない(久米さん)。

複雑に見えるデータが、実は少数の変数で記述できる場合がある。
例えば、画像や時系列のフーリエ変換、ウェーブレット変換

画像のフーリエ変換(FT)では、FTしてその値が小さなものを削
し、逆FTしてもほとんど区別できない。

そのままでは、スパースでなくとも、何らかの変換を行うとスパ
ーになっている場合が多い。

スパースな表現を実現するための座標軸(辞書と呼んでいる)
の変換を探せる場合が多い。

スパースの哲学:

世界に遍く存在する信号(データ)にはスパースな構造がある
ではないか。(何等かの秩序があるということか?)



やることは恐ろしく簡単

こんなことでいいのか・・・と思うくらい。

ただし奥は深い。計算量は膨大

中学校の数学にこんな内容があったのか、と再認識

まだ、宝が隠れているかも！

ベイズ統計だって、

「ベイズの定理」+「なんでも確率」(主観確率)思

⇒ 統計学を席捲

スパース性も極めて広範なデータ処理に浸透

ベイズもスパースも、コンピューター高速化時代の寵児。



連立一次方程式を考える

連立一次方程式①

$$3x + 2y = 11$$

$$2x - y = 5$$

未知変数 x, y 2個 方程式 2個

解ける

連立一次方程式②

$$2x - y = 5$$

$$4x - 2y = 10$$

未知変数 x, y 2個 方程式 2個

同じ方程式なので方程式の数が不足 → 解けない(不定)

余計に式が有る場合。

連立一次方程式③

$$2x - y = 5$$

$$x - 2y = 10$$

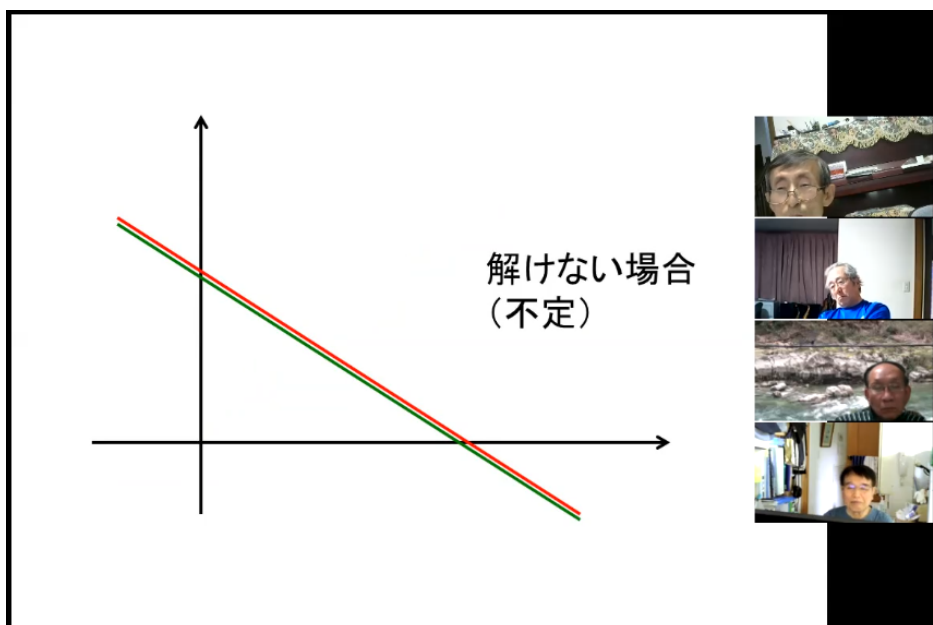
$$3x + 5y = 2$$

未知変数 x, y 2個 方程式 3個

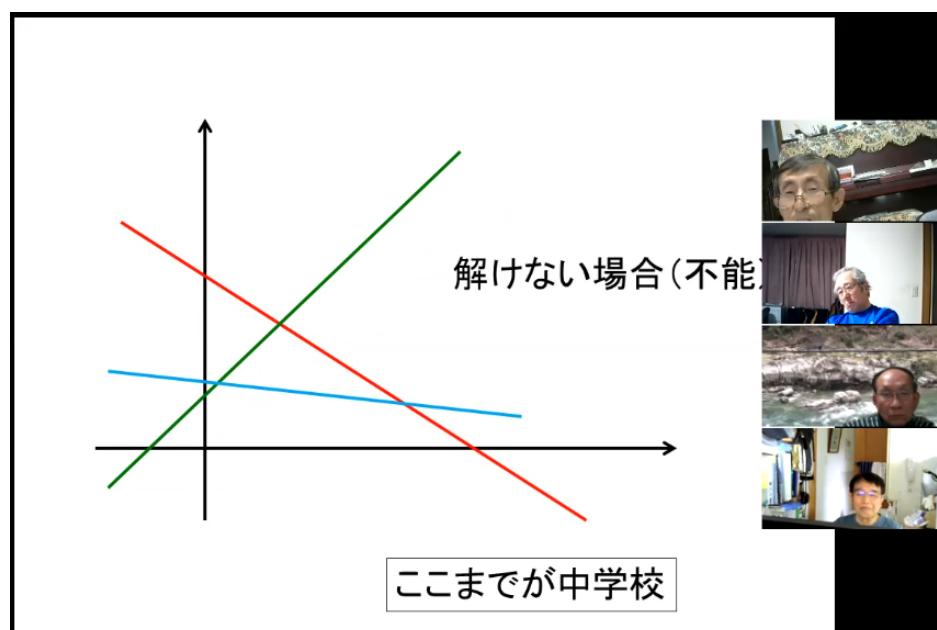
方程式が多すぎる → 解けない(不能)

以上をグラフで見ると 二つの直線が一点で交わる、解ける=解が有る。

次に、解けない場合。 方程式の数が不足=解けない。 不定！



さらに、沢山の方程式が多すぎると一点で交わらない、解けない。 不能！



•不定や不能の場合は、解が求められない。

しかし、さらに何等かの条件を付加すると「解らしきもの」が求まる。⇒ 一般化逆行列 (Moore-Penrose)

•大学 「線形代数」

連立1次方程式 を行列とベクトルで記述。

$$y = Ax$$

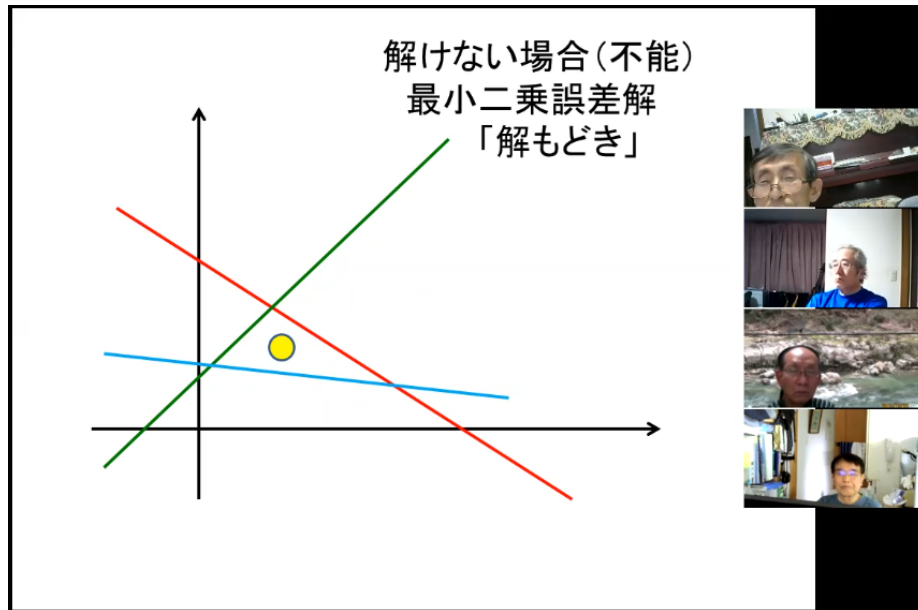
は、行列Aが正則なら逆行列が求まって解ける。

タテヨコの長さが違うAでは解けない

(余談:一般化逆行列に関連して

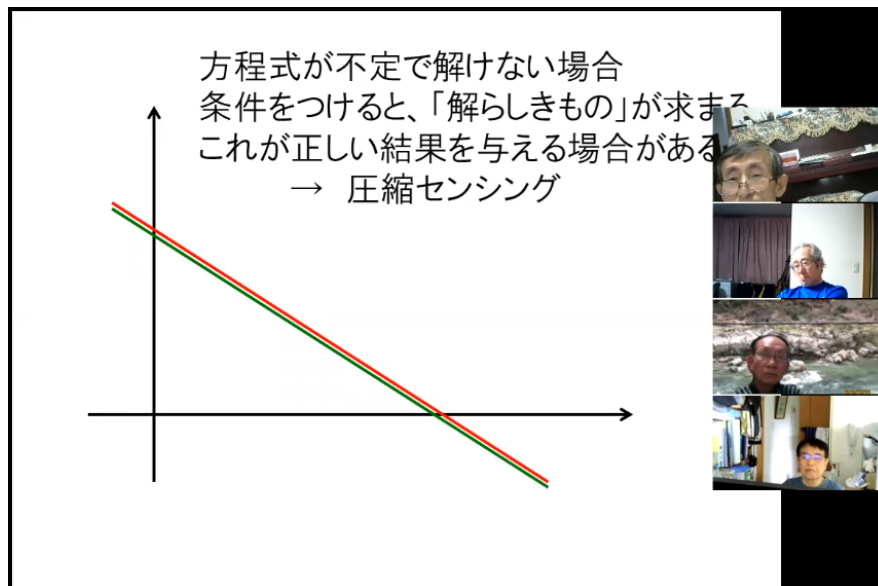
行列Aのタテヨコの長さが違ってても、正則でなくても、どんな行列でも**特異値分解**できる)

連立方程式が「不能」の場合、最小二乗条件を付けると解(らしきもの)が求まる:解ではない。



•今日のテーマ:

「解が決まらない場合、条件を付けると正しい解を与える事が有る」これが圧縮センシング。



上図のように、以下すべて、方程式の数が不足する場合を考える。不定形の場合
次のような呼称で呼ばれている。 劣決定系+付加条件 underdetermined system

知りたい原情報 x の推定

線形結合が測定されるとして

$$y = Ax$$

ベクトル 行列・ベクトル

A 観測行列は既知で y は測定値

y と A から x を推定

1次方程式の問題



例えば、1000個の未知変数 x があり、測定値 y は100個わかっているとして、未知量1000個を推定しようという問題である → 一般的には不可能

観測データ不足でも、原情報 x がスパースであれば、それを高い確率で推定できる

…圧縮センシング

Compressed Sensing



簡単な例でやってみる

からくりを見るため、非常に簡単な例でやってみる…5次の連立一次方程式を考える

連立方程式

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0.582 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= -2.871 \\ -3x_1 - x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1.582 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 1.789 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 3.203 \end{aligned}$$

行列で書くと

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 6 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.582 \\ -2.871 \\ 1.582 \\ 1.789 \\ 3.203 \end{pmatrix}$$



上記方程式は、変数5個、方程式5個だから解ける(面倒だが、とにかく普通に解ける)。

この連立方程式を解くと(スパース解)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0.125 \\ 0. \\ 0.832 \end{pmatrix}$$



実際には、解が上のようにゼロが多く(スパース)なるように意図的に作った。
ここからが肝...

3つの観測値だけで、あとはわからないとする。

「解がスパース的である」ことはわかっているとする。

「ゼロとなる変数の数」や「どの変数がゼロか」もわからない。

$$5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 0.582$$

$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -2.871$$

$$-3x_1 - x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 = 1.582$$

~~$$4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1.789$$~~

~~$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 3.203$$~~

そこで、上の式の下2個の方程式がわからない=無いとする。

そうすると、当然答えは決まらない。しかし、「解がスパース」だということだけわかっているとすると、解が求まる！これが、本日の最重要点です。

次の3つの連立方程式が与えられたとして実際に解いてみる。

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0.582 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= -2.871 \\ -3x_1 - x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1.582 \end{aligned}$$

この関係式で、2つの変数は勝手に与えることができる。 x_1, x_3 を与えることにして

$$x_5 = \frac{1}{18}[17.101 - 17(x_1 + x_3)]$$

$$x_4 = \frac{1}{4}[-1.289 + 5x_1 - 3x_3 + 2x_5]$$

$$x_2 = \frac{1}{3}[0.582 - 5x_1 + 2x_3 - 4x_4 - x_5]$$

この式は、不定の方程式なので x_1, x_3 は勝手に与えても良いことになる。そこで、

$$\begin{aligned} &x_1, x_3 \text{ を与える} \\ &\rightarrow x_5 \rightarrow x_4 \rightarrow x_2 \text{ と求まる} \end{aligned}$$

解は「0」が多いことがわかっているので、解のそれぞれの絶対値の和も小さいだろうとしてなるべく絶対値の和を小さくするような、連立1次方程式を満たしている解を探すとどうなるか？

不定型の連立1次方程式に、
次の付加条件をつけて解いてみる。

$$|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5|$$

を最小にする

BASICで絶対値の小さい領域をスイープして上の条件
満たす解を探してみた。

結果は？

正しい解(スパース)が得られる！

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.125 \\ 0 \\ 0.832 \end{pmatrix}$$

PCで力任せに探した。 $x_1, x_2, \dots$ を0.01と細かいピッチで $x_1 \sim x_5$ の解を試して絶対値の和を最小にする解全を探した。
そうすると得られた解は、**方程式の数が不足しているにもかかわらず求めたかった解になっている！**

方程式の右边、0.582、等係数は観測値なので観測値が少なくてよいことになる。
示した例では方程式が5個を3個に減らしただけであるが、より大きなサイズの場合の例を示す。

変数が1000個、測定値が100個なので、方程式は100個なので900個は決まらない。しかし、ゼロでない部分が20個しかない=1000個のうちで980個はゼロのケースである。

より大サイズの例:

$N=1000$ (変数) $M=100$ (出力) $K=20$ (非ゼロ)

2つの場合を比較

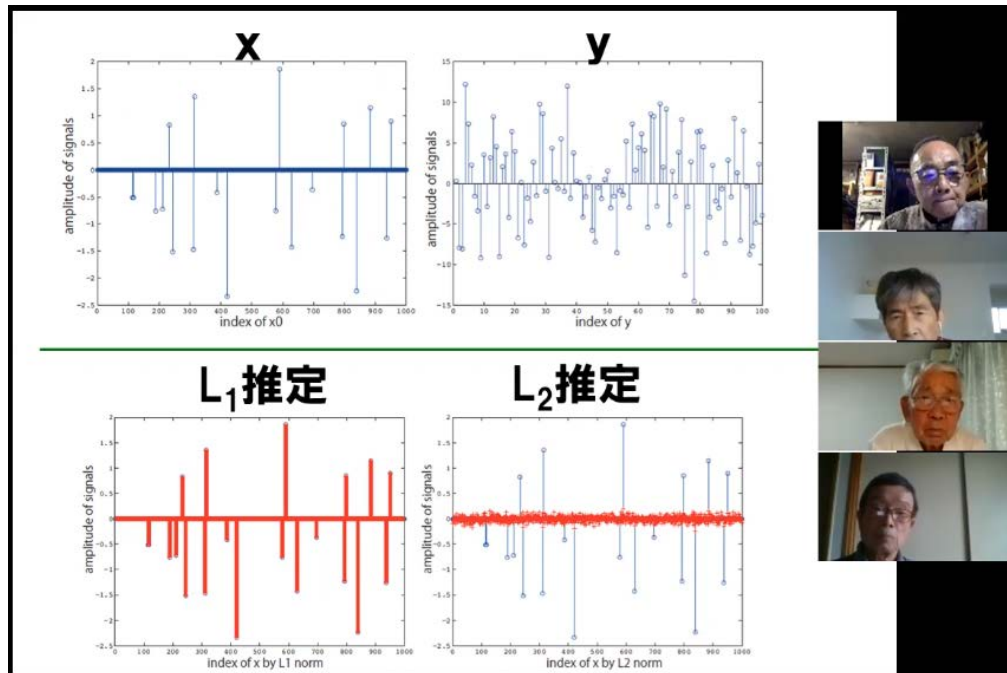
L_1 ノルム $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_N|$

L_2 ノルム $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_N^2}$

$$\min_x \|x\|_1 \quad s.t. \quad y = Ax$$

$$\min_x \|x\|_2 \quad s.t. \quad y = Ax$$

L1ノルムとL2ノルムの両方を実際計算すると下記を得ている。



「今日から始めるスパースモデリング」大関真之氏より転載

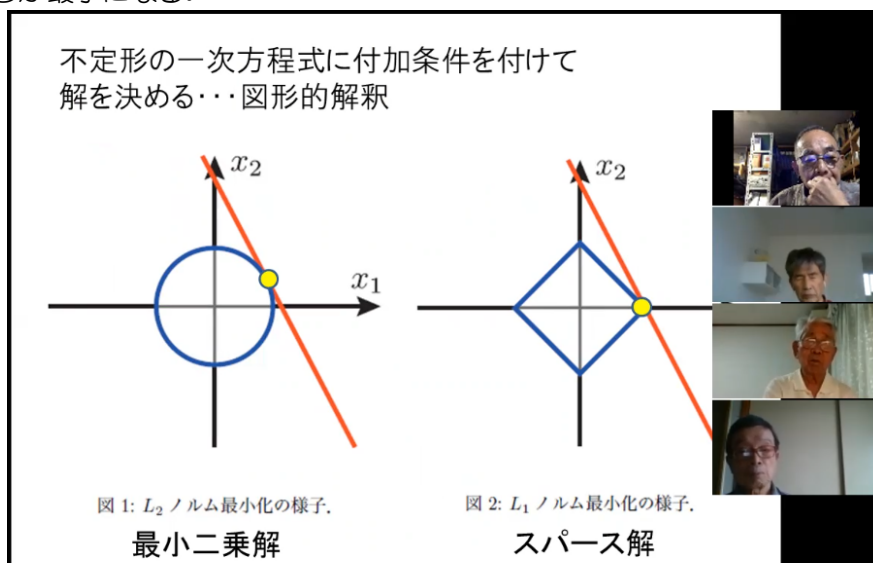
上の計算では、xが1000個取っており、20個だけが非ゼロ。

先ほどのL1推定で計算すると恐るべきことには、どんぴしゃりの答えが求められている(図上の赤い棒の部分)。ところが、二乗和にしてしまうと(L2推定)、赤い線の如く解は求まらない(青い線はこの位置に解がったことを示しているだけで、特に意味が有るわけではない)。

解がスパースの時は方程式が少なくても性質が隠れているのでそれをあぶり出すことができる。図形的に見ると極めて簡単で見通しが良い。

付加条件を付けて、解を求めるということは赤い方程式一本しかない。

最小二乗解は原点から一番近い解を求めることになるので、下図の黄色い○のところになる。ところが、スパース解は絶対値の和が最小になる解であるので、図2のダイヤモンド型(ひし形)が一定の値になるところを書いたものである、これが一番小さな値を取るとき、つまりちょうど座標軸と交わっているところを探していることになっており、これがスパース解になっている。右端にある○のところは最小になる。



「今日から始めるスパースモデリング」大関真之氏より転載

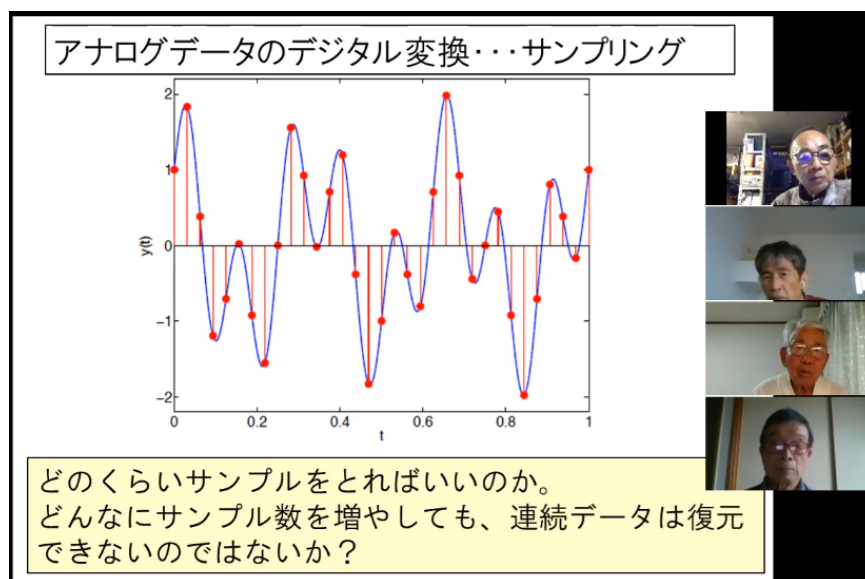
と、ここまでが一番重要な部分です。ところで、スパースなデータはどこにあるだろうか？
そのままではスパースではなくても、変換するとスパースになるデータが広く存在する。
例えば、フーリエ変換。

実際に画像をフーリエ変換すると、殆どが低周波成分で、高周波成分はほとんどない(スカスカ)。
また、経済データを見ると、株価の変化、為替の変動をフーリエ変換してみると圧倒的に低周波成分が多い。
また、画像でも同様に、高周波成分を落として画像圧縮にも使われている。

==

次に、連続データからサンプリングによって離散データ化する場合、どれだけのサンプリングレートでサンプルをとるべきかについて。

「最悪これだけのサンプリングをやっておけばよい」というサンプリング定理がある。圧縮センシングではこのサンプリングレートが大幅に節減できる！



サンプリング定理

- ・原信号をフーリエ変換した場合、非ゼロの値をとる最大周波数を $F_{\max}$ とする。
- ・サンプル周波数 F_s が $F_{\max}$ の2倍以上ならサンプルから原信号を完全復元できる。

$$F_s > 2F_{\max}$$

ナイキストレート

まず、周期関数の場合を考える

周期 T の周期関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \right]$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

原信号のフーリエ成分が $n > N$ でゼロになっているとする
(帯域制限)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \right]$$

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N$$

の $2N + 1$ 個の値がわかれば、原信号は完全に復元できる

サンプルを1つとると、これらの値の1次結合の値が1つわかる。サンプリングを続けると、この $2N + 1$ 個の未知数に対する連立一次方程式が得られる。
サンプリングを $2N + 1$ 個以上行くと、完全にこの値がわかる。

ということは、1周期 T の間に $2N + 1$ 個のサンプリングを行えば原信号の復元ができる。

最低限必要なサンプリング間隔 $T/(2N + 1)$
 $\Rightarrow$ 周波数 $F_{\text{sample}} = (2N + 1)/T$

帯域制限された原信号の最大周波数は $F_{\text{max}} = N/T$
 (x が1増える間に、 $2\pi N/T$ 増える)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \right]$$

$$F_{\text{sample}} > (2N + 1)/T = 2F_{\text{max}} + 1/T \Rightarrow 2F_{\text{max}} \quad T \rightarrow \infty$$

これがサンプリング定理

- **最悪でも** ナイキストレート以上でサンプリングをやれば、原信号が復元できる。
- **「ナイキストレート以下でサンプリングしたら、原信号が復元できない」とは言っていない！**
- 例えば、信号周波数に上限と下限があって帯域が制限されているとすると、ナイキストレート以下で完全なサンプリングができる。

- 圧縮センシングでは、別の意味でナイキストレートでのサンプリング数を圧倒的に節約できる。
スパース性の活用

サンプリング間隔が大きすぎると、折り返し雑音(エイリアシング)が発生する。

用語が紛らわしい:

ナイキスト レート

原信号に含まれている最大周波数 $F_{\max}$ の2倍 $2F_{\max}$
ナイキストレート以上の周波数でサンプリングすれば
原信号の情報が失われない。

ナイキスト周波数

サンプリングをサンプリング周波数 F_{sample} で行ったとして
情報を失わずにサンプリングできるような原信号が含む
周波数成分の上限値 $F_{\text{sample}}/2$

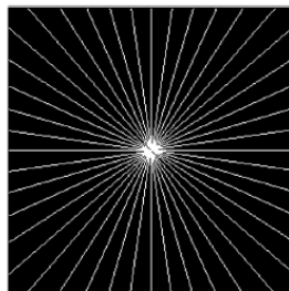
圧縮センシング:

ナイキストレートはこれだけデータをとれば絶対に大丈夫という安全値であり、これをうまく節減し、
ナイキストレートより圧倒的に少ないデータで復元することが出来る場合がある。

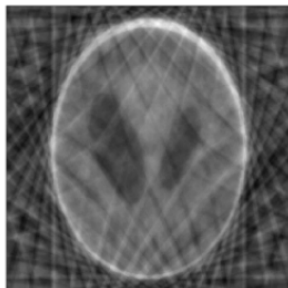
Candes-Ronberg-Tao (2006)からの例



(a)



(b)



(c)



(d)

トモグラフィーのシミュレーション

左上: 原画像(Logan-Shepp Phantom)
#512x512

右上: 2次元フーリエ変換のサンプル値
を22方向から512点採取.

左下: 一般化逆行列による復元結果.

右下: 画素値の空間変化率がスパースであることを考慮した復元結果.
原画像が完全に復元されている.

ナイキストレートの約1/50のサンプル
レートで完全復元できている
→標本化定理の限界が破られている

EJ Candes J Romberg and T. Tao, IEEE Trans. IT Vol. 52, 489—502 (2006)より

「圧縮センシングの数理」樺島祥介氏より転載

圧縮センシングの定式化

連立1次方程式

$$Ax=y$$

を考える。

信号変数の数(x の次元)が測定値(y の次元)より少ない場合は、劣決定系で解は無限にたくさん存在する。このような場合、解に対する付加条件を付けることで(正則化)、無限の可能性の中から特定の解を選び出す。

$$\text{Min}_x J(x) \quad \text{subject to} \quad Ax=y$$

劣決定系の不定であるなお広い解空間に、何らかの最小化原理を持ち込むことで特定の解を選び出す。この正則化が特定の問題に対して有効かどうかは別問題。

$J(x)$ として何をとればよいか？

最良は L_0 ノルム = 非ゼロの x の成分の個数

L_0 復元

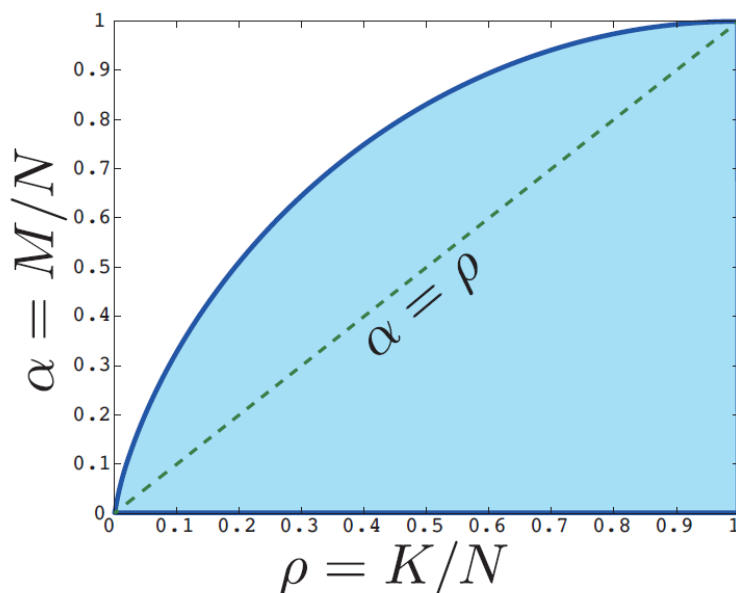
$$\text{Min}_x L_0(x) \quad \text{subject to} \quad Ax=y$$

しかし、この問題は NP 困難で計算量的に難しい → 様々な代替案。 通常は

$J(x)$ として $L_1(x)$ = 「 x の成分の絶対値の和」

この問題の具体的な解法には多くの提案がある。

***) L_0 や L_1 は「ノルム」ではないが、通例 L_0 ノルム、 L_1 ノルムなどと呼ぶ。**



L_1 ノルム最小化による再構成が可能な領域と不可能な領域の相境界の様子。

「今日から始めるスパースモデリング」大関真之氏より転載

まとめ

	圧縮センシング	ベイズ統計
単純な原理	不定の解けない1次方程式 L ₀ 最小化の付加条件で解が求まり、圧倒的な標本数の節約になる	「ベイズの定理」+「主観確率」 (決まっているものでも、知らないなら確率で扱え)
反対派	特になし	「主観確率」否定派との長く 激しいバトル
隆盛の理由	コンピュータの高速化 AIとの親和性高い	コンピュータの高速化 AIとの親和性高い
何ができるのか	不定方程式が蘇る サンプリング定理の見積もりを 大幅に節約できる場合アリ	逆確率の計算→推定、検定 古典統計の誤用・濫用 (米国統計学会の警告) ベイズなら不自然な論理が不要に
現状	急速に浸透しつつある	広範な分野にすでに浸透

今後へ

単なる1次方程式にもこんな展開がある！

圧縮センシング(スパースモデリング)には、まだ
未開の地があるだろう。 社会科学分野、経済現象？

スパースモデリング以外にも、単純で身近に埋もれた宝物はまだ
まだあるはず！





テレビ会議風景

2) 今後の日程:

第110回 7月25日(日)13時～ 竹内 学 様 (ZOOMで発信)

HP <http://www.cis-laboratories.co.jp/index.html>

以上